1) (2 val) A vibração mecânica pode definir-se como um movimento alternado em torno de uma posição de referência.

a) (25%) Indicar quais os elementos constituintes de um sistema vibratório;
b) (25%) Explicar, do ponto de vista energético, o fenómeno da vibração;
c) (25%) Definir frequência natural de vibração;
d) (25%) Definir frequência de ressonância de amplitude.

2) (2 val) O isolamento de vibrações consiste em reduzir a grandeza de forças transmitidas por equipamentos para as suas fundações ou em reduzir o movimento de apoios móveis para os equipamentos.

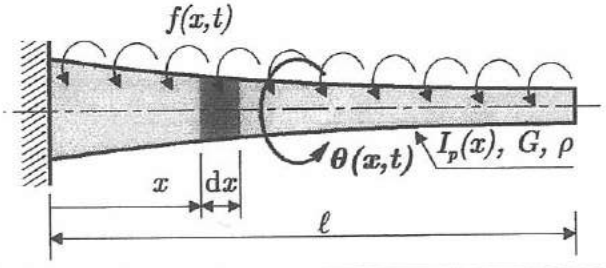
a) (25%) Definir transmissibilidade absoluta e relativa. Representar graficamente e lado a lado a TR_{abs} e a TR_{rel}, indicando eventuais pontos notáveis.
b) (25%) Discutir a eficiência do isolamento em termos da massa do equipamento e da rigidez da suspensão;
c) (25%) Justificar a razão pela qual, em geral, não se considera o amortecimento no dimensionamento de uma suspensão elástica para isolamento de vibrações;
d) (25%) Para uma excitação multi frequência, indicar, justificando, qual a frequência a considerar no dimensionamento da suspensão elástica.

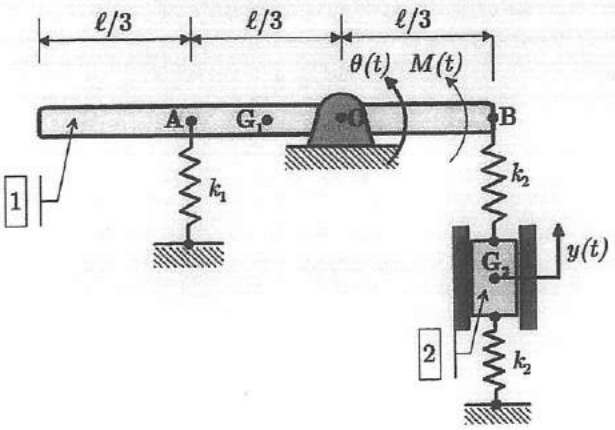
3) (2 val) O comportamento vibratório de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}$ e $\{\dot{x}(t=0)\}$.

a) (25%) Caracterizar as matrizes de massa e de rigidez;
b) (25%) Caracterizar as equações de movimento na base modal ou natural;
c) (25%) Mostrar como a resposta $\{x(t)\}$ do sistema é dada pela combinação linear (sobreposição) dos modos naturais de vibração;
d) (25%) Com base nas frequências naturais ω_1 e ω_2 e nos amortecimentos modais ξ_1 e ξ_2 de um sistema com 2 graus de liberdade, estabelecer duas equações que permitam determinar os parâmetros α e β de uma matriz de amortecimento proporcional, $[c]=\alpha[m]+\beta[k]$. Referir o interesse de uma matriz de amortecimento proporcional.

4) (2 val.) Na figura representa-se um veio de comprimento ℓ em vibração de torção descrita pelo campo de deslocamento angular $\theta(x,t)$ que se pode exprimir na forma $\theta(x,t)=\Theta(x)g(t)$.

a) (40%) Considerar um elemento infinitesimal de veio e, por aplicação da 2ª lei de Newton, estabelecer a equação de equilíbrio dinâmico;
b) (30%) Explicar o significado físico da solução $\theta(x,t)$ expressa na forma $\theta(x,t)=\Theta(x)g(t)$;
c) (30%) Escrever as expressões que traduzem as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das funções características $\Theta_r(x)$ $r=1,\ldots,\infty$ representativas das formas naturais de vibração.





2) (4 val.) O mecanismo representa-do na figura é constituído por dois corpos. O corpo 1 é uma barra de comprimento ℓ, que roda em torno do ponto fixo **O**, sob a acção do momento motor $M(t)$; os pontos **A** e **B** da barra estão ligados a molas lineares. O corpo 2 é uma massa que se encontra ligada a uma mola em cada extremidade. Na situação de equilíbrio estático, $\theta = 0$ e $y = 0$. A dissipação de energia no sistema é desprezável.

a) (30%) Estabelecer as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 & -1200 \\ -1200 & 12000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

b) (15%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

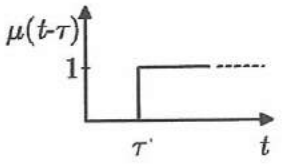
c) (15%) Escrever as equações de movimento na base modal.

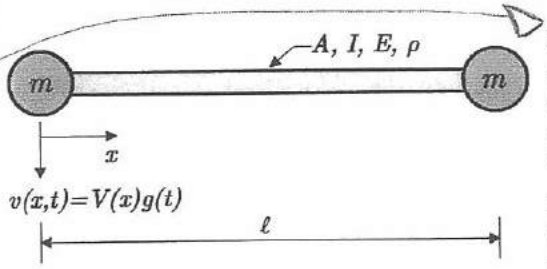
d) (20%) Calcular a expressão da amplitude $\Theta(\omega)$ de rotação da barra em função da frequência de excitação, quando $M(t) = M_0 \cos(\omega t)$ e considerando apenas o regime estacionário. Esboçar graficamente a variação da amplitude de $y(t)$ em função da frequência, assinalando eventuais pontos notáveis.

e) (20%) Determinar o limite superior da resposta $\theta(t)$ à solicitação do tipo,

$$\begin{cases} M(t) = M_0 \cos(\omega t), & t \le \tau \\ M(t) = M_0 \cos(\omega t) + \mu(t-\tau) M_1, & t > \tau \end{cases}$$

onde M_0 e M_1 são constantes e $\mu(t-\tau)$ é a função degrau unitário aplicado no instante $t = \tau$.





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I possui em cada uma das suas extremidades uma massa concentrada m. O material da viga apresenta módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. A viga encontra-se livre-livre e possui um modo de corpo rígido (translação e/ou rotação) com energia elástica nula e frequência nula.

a) (20%) Escrever e classificar as condições de fronteira da viga.

b) (20%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $V(x) = \frac{2}{\pi} - \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)$ como aproximação da primeira forma natural de vibração (com energia elástica não nula) no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $V(x)$.

c) (30%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração utilizando o quociente de Rayleigh. Exprimir o resultado em função de $\varepsilon = \frac{m}{\rho A \ell}$. Esboçar graficamente a variação da frequência em função de ε.

d) (30%) Indicar o valor exacto da frequência natural quando $m \to 0$. Comparar com o resultado aproximado obtido na alínea anterior e comentar.

Exame - 1ª chamada - 2008-06-11

3. a) A matriz de massa é simétrica e é definida positiva.

A matriz de rigidez é simétrica e normalmente é definida positiva mas no caso de sistemas semi-definidos é designada por matriz semi-definida positiva

b) São equações desacopladas em termos de inércia e de rigidez mas que só estão desacopladas em termos de amortecimento se a matriz [C] obedecer à condição de Caughey (ou, de forma mais redutora) à condição de amortecimento proporcional. Este desacoplamento torna a obtenção da solução, em termos de coordenadas modais, mais simples porque se pode resolver cada equação diferencial como se resolve uma eq diferencial de movimento de um sistema com 1 grau de liberdade.

c) Para mostrar isto basta demonstrar que os modos naturais de vibração são linearmente independentes e que portanto formam uma base da qual qualquer vector no espaço de dimensão n pode ser definido (incluindo $x(t)$).

A independência linear fica garantida se todos os vectores forem ortogonais entre si (pela Algebra). Então basta demonstrar a ortogonalidade dos vectores modais:

Como se sabe: $[K]\{\phi\} = \omega^2 [M]\{\phi\}$

considerando 2 soluções distintas $\{\phi\}_i$ e $\{\phi\}_n$

$$[K]\{\phi\}_s = \omega_s^2 [m]\{\phi\}_s \qquad (1)$$

$$[K]\{\phi\}_r = \omega_r^2 [m]\{\phi\}_r \qquad (2)$$

Pre-multiplicando (1) por $\{\phi\}_r^T$ e (2) por $\{\phi\}_s^T$

$$\{\phi\}_r^T [K]\{\phi\}_s = \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s \qquad (3)$$

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r \qquad (4)$$

Aplicando a Transposta a (4) (por ex.):

$$\{\phi\}_r^T [K]\{\phi\}_s = \omega_r^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s \qquad (5)$$

pois $[K]$ e $[m]$ são simétricas

Subtraindo (3) e (5)

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_r^2) \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s \quad , \; r,s = 1,\ldots,n$$

Como $\omega_s^2 \neq \omega_r^2$ para $r \neq s$ e

$$\{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s = 0 \quad , \; r \neq s$$

Logo, através de (3):

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = 0 \quad , \; r \neq s \qquad \text{c.q.d.}$$

d)

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = \alpha [\Phi]^T [m] [\Phi] + \beta [\Phi]^T [K] [\Phi] =$$

$$= \alpha [I] + \beta [\omega^2] = [2 \xi \omega]$$

Estão a projeção do sistema de eq. diferenciais do enunciado na base modal:

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [2\xi\omega]\{\dot{\eta}(t)\} + [\omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \Rightarrow$$

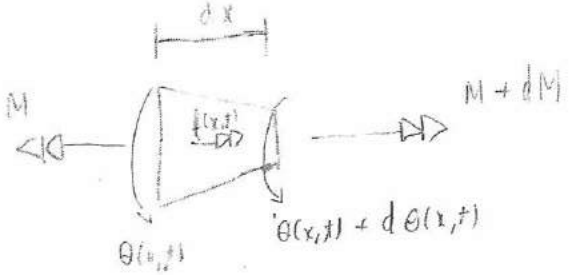
$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 2\xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1(t) + \omega_1^2 \eta_1(t) = N_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 2\xi_2 \omega_2 \eta_2(t) + \omega_2^2 \eta_2(t) = N_2(t) \end{cases}$$

Sendo:

$$2\xi_1 \omega_1 = \alpha + \beta \omega_1^2$$

$$2\xi_2 \omega_2 = \alpha + \beta \omega_2^2$$

4. a)



Pela 2ª Lei de Newton $\Sigma M = \Sigma H$

$$-M + M + dM + f(x,t)\,dx = \rho I_p(x)\,dx \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

Pela Lei dos Solidos:

$$M = G I_p \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \Rightarrow dM = \frac{\partial}{\partial x}\left(G I_p \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right) dx$$

Substituindo em (1) e dividindo por dx:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G I_p \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t) = \rho I_p(x) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2}$$

C.q.d.

b) Ao se conseguir separar a resposta em 2 influências distintas que nos dão a forma natural de vibração ($\Theta(x)$) e a evolução desta forma ao longo do tempo ($g(t)$) a obtenção da solução para o a equação diferencial de equilíbrio dinâmico é muito facilitada pois hode-se usar o método de integração de variáveis separáveis.

c)

$$\int_0^l \Theta_s(x)\, \rho I_p\, \Theta_r(x)\, dx = \delta_{rs} \quad , r,s = 1, \dots, \infty$$

$$\int_0^l \frac{d\Theta_s(x)}{dx} G I_p \frac{d\Theta_r(x)}{dx} dx = \delta_{rs} \quad , r,s = 1, \dots, \infty$$

com $\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{para } r = s \\ 0 & \text{para } r \neq s \end{cases}$

Parte Prática

2.

a) Em. Cinética

$$J_0 = J_G + m\,\overline{OG_1}^2 = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right)^2 = \frac{1}{12} m_1 l^2 + \frac{1}{36} m_1 l^2 =$$

$$= \frac{1}{9} m_1 l^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} m_1 l^2\right)\left(\dot{\theta}(t)\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{y}(t)\right)^2$$

Em. potencial

$$V = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{l}{3}\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{l}{3}\sin\theta - y\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 y^2 =$$

$$= \frac{k_1}{2}\left(\frac{l}{3}\theta\right)^2 + \frac{k_2}{2}\left(\frac{l}{3}\theta - y\right)^2 + \frac{k_2}{2} y^2$$

Forças não conservativas:

$$Q_1 = M \frac{\partial}{\partial \theta}(\theta) = M_t$$

$$Q_2 = M \frac{\partial}{\partial y}(\theta) = 0$$

Considerando as eq. de Lagrange:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{9} m_1 l^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{9} m_1 l^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = K_1 \frac{l^2}{9}\theta + K_2\left(\frac{l}{3}\theta - y\right)\frac{l}{3}$$

—"—

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_2 \dot{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m_2 \ddot{y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -K_2\left(\frac{l}{3}\theta - y\right) + K_2 y$$

$$\begin{cases} m_1 \frac{l^2}{9}\ddot{\theta}(t) + K_1 \frac{l^2}{9}\theta(t) + K_2 \frac{l}{3}\left(\frac{l}{3}\theta - y\right) = M(t) \\ m_2 \ddot{y}(t) - K_2\left(\frac{l}{3}\theta - y\right) + K_2 y = 0 \end{cases}$$

Em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 \frac{l^2}{9} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1+K_2)\frac{l^2}{9} & -K_2\frac{l}{3} \\ -K_2\frac{l}{3} & 2K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Fazendo $\{u(t)\} = \{u\}\cos(\omega t - \phi)$

$$\begin{vmatrix} 400 - 0{,}2\omega^2 & -1200 \\ -1200 & 12000 - 10\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 \cong 25{,}728 \text{ rad/s}$$

e $\omega_2 \cong 50{,}379$ rad/s

1º Forma natural

$\omega_1 = 25{,}728$

$$(400 - 0{,}2 \times \omega_1^2)\,\Theta(\omega) - 1200\,Y(\omega) = 0 \Rightarrow \Theta(\omega) \cong 4{,}484\,Y(\omega)$$

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 4{,}484 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2º Forma natural:

$$(400 - 0{,}2\,\omega_2^2)\,\Theta(\omega) - 1200\,Y(\omega) = 0 \Rightarrow \Theta(\omega) \cong -11{,}152\,Y(\omega)$$

$$\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} -11{,}152 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c)

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{\mu\}_1^T [m] \{\mu\}_1}} \{\mu\}_1 \cong 0{,}267 \{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 1{,}1975 \\ 0{,}2671 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 \cong 0{,}1693 \{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} -1{,}8884 \\ 0{,}1693 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 25{,}728^2 & 0 \\ 0 & 50{,}379^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1975 & -1{,}8884 \\ 0{,}2671 & 0{,}1693 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 25{,}728^2 & 0 \\ 0 & 50{,}379^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}1975\,M(t) \\ -1{,}8884\,M(t) \end{Bmatrix}$$

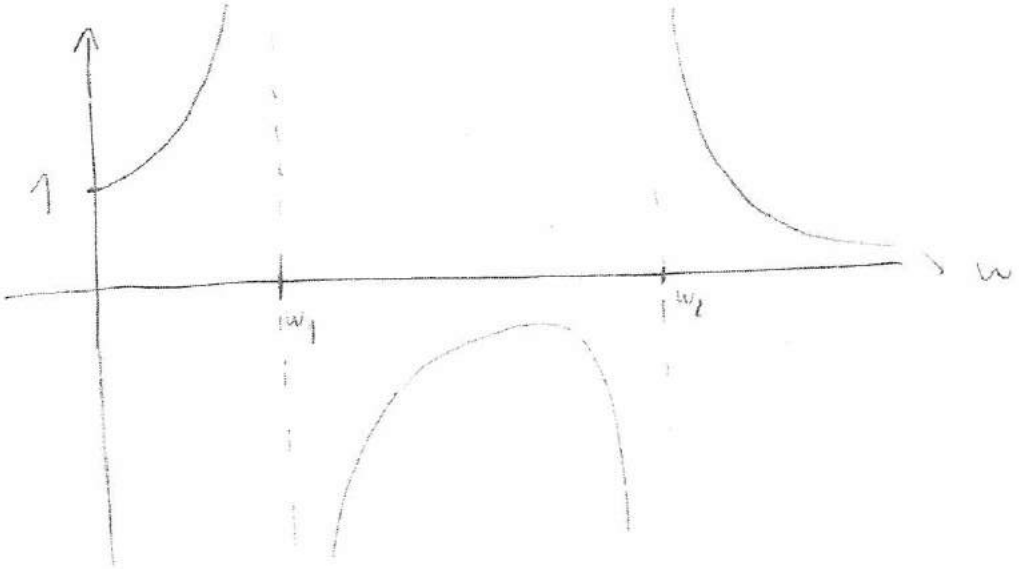
d)

$$\begin{bmatrix} 400 - 0{,}2\omega^2 & -1200 \\ -1200 & 120000 - 10\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ Y(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pelas expressões 9.19.

$$\Theta(\omega) = \frac{(120000 - 10\omega^2) M_0 - 0}{(400 - 0{,}2\omega^2)(120000 - 10\omega^2) - 1200^2}$$

$$Y(\omega) = \frac{0 - (-1200) M}{(400 - 0{,}2\omega^2)(120000 - 10\omega^2) - 1200^2}$$



e) Através de c):

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 25{,}728^2 \eta_1(t) = 1{,}1975\ M_0 \cos(\omega t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 50{,}379^2 \eta_2(t) = -1{,}8884\ M_0 \cos(\omega t) \end{cases} \quad t \leq 6$$

Para cada instante:

$$\eta_1(t) = \frac{\frac{1,1975\, M_0}{25,728^2}}{|1-\beta_1^2|} \cos(\omega t - \phi_1)$$

ϕ_1: π se $\beta_1 > 1$; 0 se $\beta_1 < 1$

$$\eta_2(t) = \frac{\frac{-1,8884\, M_0}{50,379^2}}{|1-\beta_2^2|} \cos(\omega t - \phi_2)$$

ϕ_2: π se $\beta_2 > 1$; 0 se $\beta_1 < 1$

Para $t > \tau$:

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 25,728^2\, \eta_1(t) = 1,1975\, M_0 \cos(\omega t) + 1,1975\, M_1\, \mu(t-\tau) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 50,379^2\, \eta_2(t) = -1,8884\, M_0 \cos(\omega t) - 1,8884\, M_1\, \mu(t-\tau) \end{cases}$$

Se ignorarmos o efeito das forças, já sabemos qual a contribuição da parte harmónica. Resta calcular a resposta máxima ao degrau:

$$\eta_{1\,max}(\omega) = \frac{2 \times (1,1975\, M_1)}{25,728^2} \cong 0,003618\, M_1$$

$$\eta_{2\,max}(\omega) = \frac{2 \times (-1,8884\, M_1)}{50,379^2} \cong -0,001488\, M_1$$

Então, considerando as 2 solicitações:

$$\eta_{1\,max} = \frac{0,001809\, M_0}{|1-\beta^2|} + 0,003618\, M_1$$

$$\eta_{2\,max} = -\frac{0,000744\, M_0}{|1-\beta^2|} - 0,001488\, M_1$$

$$\theta(t)_{max} \leq \underbrace{\phi_{11}}_{1,1975} \eta_{1\,max} + \underbrace{\phi_{12}}_{-1,8884} \eta_{2\,max} \quad (\Leftarrow)$$

$$(\Leftarrow) \quad \boxed{\theta(t)_{max} \leq \frac{0,003571\, M_0 + 0,00714\, M_1}{|1-\beta^2|}}$$

É menor porque η_1 e η_2 não estão em fase

3. a) $v(x,t) = V(x)\, g(t)$

$x = 0$:

$$EI \frac{\partial^2 V(0)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V(0)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right)\Big|_{x=0} = m\, \ddot{v}(x,t)\Big|_{x=0} = -\omega^2 m\, V(0) \Leftrightarrow \frac{\partial^3 V(0)}{\partial x^3} = -\frac{\omega^2 m\, V(0)}{EI}$$

$x = l$:

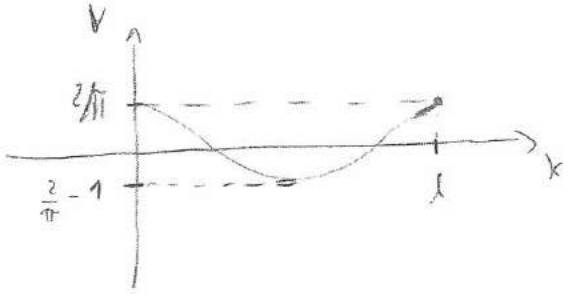
$$EI \frac{\partial^2 V(l)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V(l)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right)\Big|_{x=l} = m\, \ddot{v}(x,t)\Big|_{x=l} \Leftrightarrow \frac{\partial^3 V(l)}{\partial x^3} = -\frac{\omega^2 m\, V(l)}{EI}$$

Todas estas cond. fronteira são naturais:

b) Basta a função ser derivável até às vezes da ordem do problema (problema de ordem 4), e verificar as condições fronteira geométricas (que neste caso não existem):

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{\pi}{l}\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) \rightarrow \frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{\pi^2}{l^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$



c)

Em. pot.:

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{EI\pi^4}{2l^4}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2\pi}\cdot l \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right]_0^l =$$

$$= \frac{EI\pi^4}{2l^4}\left[\frac{l}{2} - 0 - 0\right] = \frac{EI}{2}\cdot\frac{\pi^4}{2l^3}$$

Em. cinética:

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\left(V(x)\right)^2 dx + T^*_{cfm}\right) =$$

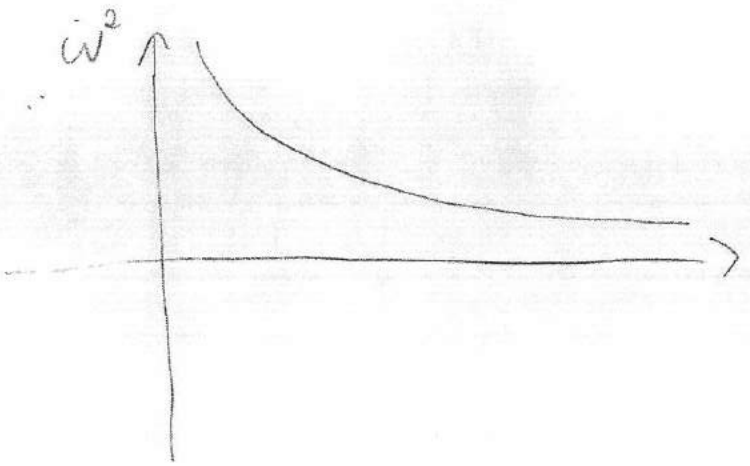
$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\left\{\frac{-\left[l\left(\pi\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) - 8\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) - (\pi^2+8)x\right]}{2\pi^2}\right\}_0^l + \frac{1}{2}m\left(V(l)\right)^2\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}m\left(V(l)\right)^2\right) = \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\right) + \frac{m}{2}\frac{8}{\pi^2}\right)$$

Entao:

$$R\left(V(x)\right) = \omega^2 = \frac{\frac{EI}{2}\cdot\frac{\pi^4}{2l^3}}{\frac{\rho A}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\right) + \frac{m}{2}\frac{8}{\pi^2}} =$$

$$= \frac{\frac{EI}{\rho A l}\left(\frac{\pi^4}{2l^3}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} + \varepsilon\cdot\frac{8}{\pi^2}}$$



d) Pág. 359

na tabela diz β_2 mas na realidade este é o 3º Modo de vibração (o 1º e o 2º são translação e rotação do corpo rígido)

livre - livre $\longrightarrow$ $\boxed{\beta_3 \, l = 4{,}7300}$

$$\omega_3 = (4{,}7300)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} = \boxed{22{,}3729 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}}$$

$$\left.\beta(\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0} = \omega^2 = \frac{EI}{\rho A l^4} \, \frac{\frac{\pi^4}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^{GR} = \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}}} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \cong \boxed{22{,}6764 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}}$$

comparação

$$\text{erro} = \frac{|\omega^{GR} - \omega_3|}{\omega_3} \times 100 \cong 1{,}37\%$$